

Н.Л. УТУГОВ, д.т.н., профессор каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля, г. Луганск
А.П. КАРПОВ, к.т.н., доцент каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля

О ПРОФИЛИРОВАНИИ ЗУБЬЕВ НА НЕКРУГЛЫХ КОЛЕСАХ

Проведено порівняльний аналіз профілів зубців некруглих прямозубих коліс, нарізаних методом обкату довбляком при розташуванні осі обертання заготовки на міжосьовій відстані довбляк-заготовка поза цією міжосьовою відстанню. На підставі проведених теоретичних досліджень сформульована теорема.

The comparative research of tooth profile of noncircular gear cut by a rolling method by gear-cutter at an arrangement of gear-blank rotational axis on interaxial distance cutter-blank outside of this interaxial distance is carried out. On the basis of carried out theoretical researches the theorem is formulated.

Из основной теоремы зацепления [1] следует, что при заданных профилях полюсом зацепления является точка пересечения нормали к профилям с линией межосевого расстояния. Это условие соблюдается в случае изготовления передач круглыми зубчатыми колесами.

Для проверки соблюдения условий основной теоремы зацепления в случае передач некруглыми зубчатыми колесами сравним поверхности зубьев, полученные методом обкатки режущего инструмента (круглого долбяка) по заготовке некруглого колеса. Здесь могут быть два случая.

В первом случае профилирование зубьев происходит по известному методу для круглых колес, т.е. режущий инструмент и нарезаемое некруглое колесо имеют постоянные согласованные окружные скорости и осевые перемещения при нахождении оси вращения заготовки на межосевом расстоянии режущий инструмент-заготовка.

Во втором случае применяется новый способ нарезания [2] некруглых зубчатых колес: режущий инструмент и заготовка имеют постоянные окружные согласованные скорости и осевые перемещения при нахождении оси вращения заготовки вне межосевого расстояния режущий инструмент-заготовка. При этом должны выполняться два условия.

Условие первое. Окружная скорость нарезаемого колеса должна быть постоянной, то есть:

$$V_i = \omega_i \cdot r_i = \text{const}, \quad (1)$$

где ω_i – угловая скорость вращения заготовки; r_i – радиус центроиды нарезаемого колеса в станочном зацеплении.

Наиболее простым вариантом выполнения этого условия является введение в кинематическую цепь деления устройства для нарезания некруглых зубчатых колес копирного некруглого колеса, радиус центроиды которого изменяется по тому же закону, что и радиус центроиды нарезаемого колеса.

При этом полагаем, что точка контакта центроиды режущего инструмента и центроиды нарезаемого колеса все время будет оставаться неподвижной (рисунок 1).

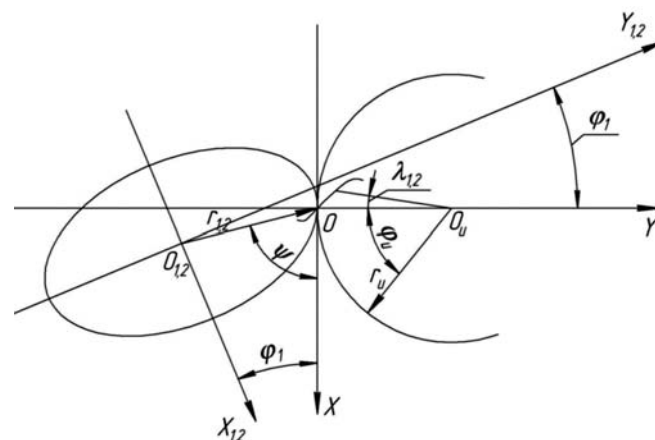


Рисунок 1 – Системы координат некруглого колеса при нарезании зубьев

Условие второе. Нарезаемые зубья на некруглых колесах должны располагаться нормально центроиде. Это значит, что ось симметрии основания нарезаемого зуба должна совпадать с нормалью к данному участку центроиды.

Для выполнения этого условия заготовке нарезаемого некруглого колеса кроме вращательного движения вокруг его оси с постоянной окружной скоростью необходимо сообщать дополнительные обкатные движения относительно точки контакта центроид заготовки и режущего инструмента в плоскости, перпендикулярной наружной (внутренней) образующей заготовки. При этом общая нормаль в точке их контакта проходит через центр кривизны центроиды нарезаемого участка заготовки [2] (рисунок 2).

При этом полагаем, что режущий инструмент 2 совершает только вращательное движение с постоянной окружной скоростью вокруг своей оси и перемещается вдоль образующей заготовки 1.

Позиции 3, 4, 5, 6 и 7 (рисунок 2) – положения заготовки относительно режущего инструмента в процессе нарезания зубьев.

Рассмотрим второе условие в торцевой плоскости цилиндрического некруглого колеса. На рисунке 1 система координат $O_1X_1Y_1$ – подвижная, связанная с заготовкой, где центр

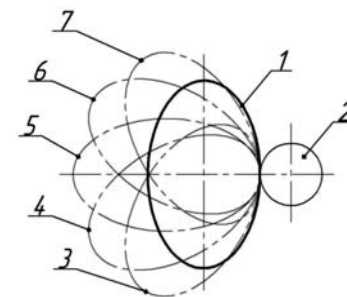


Рисунок 2 – Положения заготовки некруглого зубчатого колеса относительно режущего инструмента: 1 – заготовка, 2 – режущий инструмент, 3, 4, 5, 6, 7 – позиции заготовки

O_1 находится на оси вращения заготовки. Система OXY – неподвижная, у которой центр O совпадает с точкой контакта центроид режущего инструмента и нарезаемого колеса. Ось OX совпадает с касательной к центроиде нарезаемого колеса и с центроидой режущего инструмента (червячной фрезы, например). Радиус центроиды нарезаемого колеса, например, ведущего, определяется по зависимости:

$$r_1 = \frac{a_w i(\varphi_1)}{1 + i(\varphi_1)}, \quad (2)$$

где a_w – межосевое расстояние передачи некруглыми зубчатыми колесами; $i(\varphi_1)$ – функция передаточного отношения передачи некруглыми колесами; φ_1 – угол поворота ведущего некруглого колеса.

Уравнение (2) в подвижных системах координат имеет вид:

$$X_1 = \frac{a_w i(\varphi_1) \cos \varphi_1}{1 + i(\varphi_1)}; \quad (3)$$

$$Y_1 = \frac{a_w i(\varphi_1) \sin \varphi_1}{1 + i(\varphi_1)}. \quad (4)$$

Координаты оси вращения ведущего нарезаемого колеса относительно точки O в системе координат OXY в любой момент времени описываются зависимостями:

$$X = \frac{a_w i(\varphi_1)}{1 + i(\varphi_1)} \cos \psi; \quad (5)$$

$$Y = -\frac{a_w i(\varphi_1)}{1 + i(\varphi_1)} \sin \psi, \quad (6)$$

где ψ – угол, образуемый радиус-вектором центроиды колеса с положительным направлением касательной [2], с использованием (3) и (4) равен

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r_1}{dr_1/d\varphi_1} = \frac{i(\varphi_1)[1 + i(\varphi_1)]}{i'(\varphi_1)}. \quad (7)$$

Отсюда

$$\sin \psi = \frac{i(\varphi_1)[1 + i(\varphi_1)]}{\sqrt{[1 + i(\varphi_1)]^2 i^2(\varphi_1) + [i'(\varphi_1)]^2}}; \quad (8)$$

$$\cos \psi = \frac{i(\varphi_1)}{\sqrt{[1 + i(\varphi_1)]^2 i^2(\varphi_1) + [i'(\varphi_1)]^2}}. \quad (9)$$

Подставив значения (8) и (9) в уравнения (5) и (6), соответственно получим:

$$X = \frac{a_w i^2(\varphi_1)}{\sqrt{[1 + i(\varphi_1)]^2 i^2(\varphi_1) + [i'(\varphi_1)]^2}}; \quad (10)$$

$$Y = \frac{-a_w i^2(\varphi_1)}{\sqrt{[1 + i(\varphi_1)]^2 i^2(\varphi_1) + [i'(\varphi_1)]^2}}. \quad (11)$$

Система уравнений (10) и (11) описывает траекторию движения оси вращения нарезаемого некруглого колеса относительно точки контакта центроиды его с центроидой режущего инструмента в зависимости от углов поворота заготовки.

Положив в уравнениях (10) и (11) $i(\varphi_1) = \text{const}$, получим уравнения координат оси вращения для круглой заготовки:

$$X = 0; \quad (12)$$

$$Y = \frac{-a_w i(\varphi_1)}{1 + i(\varphi_1)}. \quad (13)$$

Из уравнений (10) и (11), (12) и (13) следует, что для нарезания зубьев на некруглых колесах, расположенных нормально центроиде, необходимо ось вращения заготовки поворачивать вокруг точки контакта центроид нарезаемого колеса и режущего инструмента в плоскости перпендикулярной образующей заготовки. Если же сделать ось вращения заготовки неподвижной в плоскости OXY , то для выполнения второго условия, указанного выше, необходимо режущему инструменту сообщать дополнительные согласованные перемещения в направлении вращения заготовки и вдоль межосевого расстояния заготовка-режущий инструмент.

Уравнения (12) и (13) показывают, что известные методы нарезания круглых зубчатых колес являются частными случаями описываемого способа [2].

Пусть режущие кромки профиля зубьев режущего инструмента (долбяка) очерчены кривой вида:

$$\begin{aligned} X_u &= \pm f_1(\lambda); \\ Y_u &= r_u \pm f_2(\lambda), \end{aligned} \quad (14)$$

где λ – параметр; $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ – функции, описывающие режущие кромки, состоящие из обыкновенных точек; r_u – радиус делительной окружности долбяка.

Пользуясь методом Х.И. Гохмана [3], совершив переход от системы координат режущего инструмента $X_n Y_n Z_n$ к неподвижной системе координат XYZ , а затем от неподвижной системы к подвижной системе координат не-

круглого зубчатого колеса, запишем координаты контактной точки на поверхностях зубьев:

$$\begin{aligned} X_{1,2} &= [\pm f_1(\lambda)]\cos(\varphi_n + \varphi_{1,2}) - [r_n \pm f_2(\lambda)]\sin(\varphi_n + \varphi_{1,2}) + r_n \sin \varphi_n + r_{1,2} \sin \psi_{1,2}; \\ Y_{1,2} &= [\pm f_1(\lambda)]\sin(\varphi_n + \varphi_{1,2}) + [r_n \pm f_2(\lambda)]\cos(\varphi_n + \varphi_{1,2}) - r_n \cos \varphi_n - r_{1,2} \cos \psi_{1,2}; \\ Z_{1,2} &= Z_n. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнение связи между поворотами режущего инструмента и нарезаемых некруглых колес будет иметь вид:

$$\begin{aligned} &[r_n \pm f_1(\lambda) \pm f_2(\lambda)][1 + i(\varphi_1)][1 + \sin 2(\varphi_n + \varphi_{1,2})] + r_n [1 + i(\varphi_1)]\sin(\varphi_n + 2\varphi_{1,2}) + \\ &+ \cos(\varphi_n + 2\varphi_{1,2}) + r_{1,2} [1 + i(\varphi_1)]\sin(\varphi_n + \varphi_{1,2} + \psi_{1,2}) + \cos(\varphi_n + \varphi_{1,2} + \psi_{1,2}) - \\ &- r_{1,2}(\varphi_n + \psi_{1,2})' [\sin(\varphi_n + \varphi_{1,2}) + \cos(\varphi_n + \psi_{1,2})] = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Связь между углами $\lambda_{1,2}$ поворота долбяка и углами поворота $\varphi_{1,2}$ нарезаемого некруглого колеса:

$$\varphi_{n1} = \frac{r_n}{a_w} \varphi_n + \int_0^{\varphi_1} \frac{1}{i(\varphi_1)} d\varphi_1 = \left[\frac{r_n}{a_w} + \frac{1}{i(\varphi_1)} \right] \varphi_1; \quad (17)$$

$$\varphi_{n2} = \frac{r_u}{a_w} \varphi_n + \int_0^{\varphi_1} i(\varphi_1) d\varphi_1 = \left[\frac{r_u}{a_w} + i(\varphi_1) \right] \varphi_1. \quad (18)$$

Уравнения (15) и (16) являются параметрическими уравнениями профилей зубьев нарезаемых некруглых колес методом обката режущего инструмента (долбяка) по заготовке некруглого колеса. При этом кроме согласованных движений заготовки и режущего инструмента вокруг своих осей, заготовка нарезаемого колеса совершает дополнительные обкатные движения относительно точки касания центроид нарезаемого колеса и режущего инструмента по закону, связанному с формой центроиды заготовки, то есть с функцией передаточного отношения.

Если заготовке нарезаемого некруглого колеса сообщать только согласованные с режущим инструментом движения вращения с постоянной окружной скоростью и перемещения вдоль линии межосевого расстояния без обкатных дополнительных движений заготовки относительно точки контакта центроид нарезаемого колеса и режущего инструмента, то параметрические уравнения профилей зубьев некруглых колес будут иметь вид:

$$\begin{aligned} X_{1,2} &= [\pm f_1(\lambda)]\cos(\varphi_n + \varphi_{1,2}) - [r_n \pm f_2(\lambda)]\sin(\varphi_n + \varphi_{1,2}) + r_n \sin \varphi_n; \\ Y_{1,2} &= [\pm f_1(\lambda)]\sin(\varphi_n + \varphi_{1,2}) + [r_n \pm f_2(\lambda)]\cos(\varphi_n + \varphi_{1,2}) - r_n \cos \varphi_n - r_{1,2}; \\ Z_{1,2} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнение связи между углами φ_n поворота режущих кромок обобщенного долбяка и углами $\varphi_{1,2}$ поворота заготовки нарезаемого некруглого колеса:

$$\begin{aligned} &[r_n \pm f_1(\lambda) \pm f_2(\lambda)][1 + \sin 2(\varphi_n + \varphi_{1,2})] + r_n [1 + i(\varphi_1)]\sin(\varphi_n + 2\varphi_{1,2}) + \cos(\varphi_n + 2\varphi_{1,2}) + \\ &+ r_{1,2} [1 + i(\varphi_1)]\sin(\varphi_n + \varphi_{1,2}) + \cos(\varphi_n + \varphi_{1,2}) - r_{1,2} [\sin \varphi_n + \cos \varphi_n] = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнения (15)...(20) описывают поверхности зубьев прямоугольной передачи некруглыми колесами в зависимости от функции передаточного отношения в общем виде.

Для проверки соблюдения условий основной теоремы зацепления запишем уравнения проекций нормалей к поверхностям одного из колес, например, ведущего, описываемого уравнением (15), и сравним их:

$$\begin{aligned} n_{x1} &= \frac{dX_1}{d\varphi_n} = \{[\pm f_2(\lambda)]\cos(\varphi_n + \varphi_1) - [r_n \pm f_1(\lambda)]\sin(\varphi_n + \varphi_1)\}(\varphi_n + \varphi_1)' + r_n \varphi_1' \sin \varphi_1; \\ n_{y1} &= \frac{dY_1}{d\varphi_n} = -\{[\pm f_2(\lambda)]\sin(\varphi_n + \varphi_1) + [r_n \pm f_1(\lambda)]\cos(\varphi_n + \varphi_1)\}(\varphi_n + \varphi_1)' + r_n \varphi_1' \cos \varphi_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Такие же уравнения имеют проекции нормалей к поверхностям зубьев ведомого колеса.

Из уравнений (21) следует, что условия основной теоремы зацепления соблюдаются в зубчатой передаче некруглыми колесами, изготовленной методом обката при помощи производящего колеса с постоянным радиусом центроиды независимо от расположения оси вращения заготовки относительно мгновенного центра вращения. Здесь зубья спроектированы относительно нормали к центроиде нарезаемого участка колеса, проходящей через центр кривизны этого участка.

Полученный результат дает основание сделать вывод, что при профилировании зубьев на некруглых колесах методом обката производящего колеса с постоянным радиусом центроиды расположение оси вращения изготавливаемого колеса вне нормали к центроиде нарезаемого участка, проходящей через мгновенный центр вращения его зубьев, не нарушает основной теоремы зацепления в передаче некруглыми колесами.

Для оценки поверхностей профилей зубьев некруглых колес, нарезанных одним и тем же производящим инструментом (долбяком) методом обката сравним уравнения связи (16) и (20). Исключив одинаковые слагаемые, для первого и второго случаев получим:

$$\left(1 + \frac{r_u}{r \cos \psi}\right) [\sin(\varphi_n + \varphi - \psi) + \cos(\psi - \varphi_n - \varphi)] - (\varphi_n - \psi)' [\sin(\varphi_n + \psi) + \cos(\varphi_n + \varphi)] = 0; \quad (22)$$

$$\left(1 + \frac{r_n}{r}\right) [\sin(\varphi_n + \varphi) + \cos(\varphi_n + \varphi)] + \sin \varphi_n + \cos \varphi_n = 0. \quad (23)$$

Отсюда следует, что уравнения (22) и (23) не равны друг другу. Это значит, что касательные к профилям зубьев, спрофилированных одним и тем же инструментом, но с разными движениями заготовки относительно режущего инструмента, не совпадают и имеют разные углы наклона к осям координат. Следовательно, в обоих случаях профили зубьев разные.

Результат, полученный в уравнениях (22) и (23), можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема. Для обеспечения расположения зубьев нормально центроиде нарезаемого участка некруглого колеса необходимо и достаточно заготовке нарезаемого колеса, кроме согласованного с производящим инструментом вращательного движения с постоянной окружной скоростью сообщать дополнительные обкатные движения в плоскости нормального сечения образующей аксоида нарезаемого колеса относительно полюса зацепления нарезаемого колеса и режущего инструмента таким образом, чтобы центр кривизны нарезаемого участка центроида находился на линии нормали к центроиду режущего инструмента, проходящей через мгновенный центр вращения.

Доказательством теоремы служит изложенный выше материал.

Список литературы: 1. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. – М.: Наука, 1968. – 584с. 2. А.с. 439375 СССР, МКа В23f 15/02. Способ нарезания некруглых зубчатых колес / Н.Л. Утатов, В.Н. Севрюк. – Оpubл. в Б.И., 1974, №30. – 1975. 3. Гохман Х.И. Теория зацеплений, обобщенная и развитая путем анализа. – Одесса, 1986.

Поступила в редколлегию 21.04.10

УДК 621.833

А.В. ФЕДЧЕНКО, к.т.н., ст. преп. каф. НГГ НТУ "ХПИ", г. Харьков
Н.В. МАТЮШЕНКО, к.т.н., доцент каф. НГГ НТУ "ХПИ"

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ПЕРЕДАЧУ НОВИКОВА ДЛЗ

Виконано дослідження стійкості рішення системи диференціальних рівнянь з змінними коефіцієнтами, що описують циліндричну передачу Новикова.

Stability of the decision of system of the differential equations with the variable factors, Novikov describing cylindrical gear is investigated.

Для задачи об устойчивости движения в постановке Ляпунова А.М. характерно следующее:

а) рассматривается устойчивость невозмущенного движения только по отношению к возмущениям начальных условий;

б) предполагается, что начальные возмущения, а следовательно, и последующие возмущения – достаточно малые величины;

в) рассматривается неограниченный интервал времени.

Рабочим состоянием многих машин и агрегатов является колебательное движение их звеньев, не является исключением и зубчатая передача. Будем считать ее голономной механической системой, которая в общем случае описывается системой дифференциальных уравнений n -го порядка вида

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \dots, x_n); S = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

и в которой функции X_s удовлетворяют условиям Липшица по переменным x_s в каждой замкнутой области $\bar{G}_s \subset G$ и $t \in J_t^+$, где $J_t^+ = [0 \leq t \leq \infty]$:

$$G = \{x: x \in E_n; \|x\| < H, H = \text{const или } H = \infty\}; \|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \text{ или } \|x\|_2 = \max_s (x_s). \quad (2)$$

При этом из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно [1], что по каждому набору вещественных чисел $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t_0)$ из области $\bar{G}_s \times J_t^+$ определяется n непрерывно дифференцируемых функций

$$x_s(t, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t_0) = x_s(t); s = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

удовлетворяющих системе (1) и принимающих значения

$$x_s(t) = x_s^0 \text{ при } t = t_0.$$

Следует заметить, что функции $X_s (s=1, 2, \dots, n)$ должны, естественно, зависеть от некоторых конструктивных параметров передачи $(\gamma_1, \gamma_m) \in \Omega$.

Наряду с системой (1) имеет место другая система

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \dots, x_n) + R_s(t, x_1, \dots, x_n); (S = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

в которой функции $R_s(t, x_1, \dots, x_n)$ учитывают непрерывно действующие возмущения на систему (1). В этом случае можно предположить, что в области $\bar{G}_s \times J_t^+$ существует решение системы (4) и оно единственно для заданных начальных условий. Однако в [1] показано, что функции $R_s(t, x_1, \dots, x_n)$ на практике не определимы, что существенно усложняет задачу, но, как правило, из-